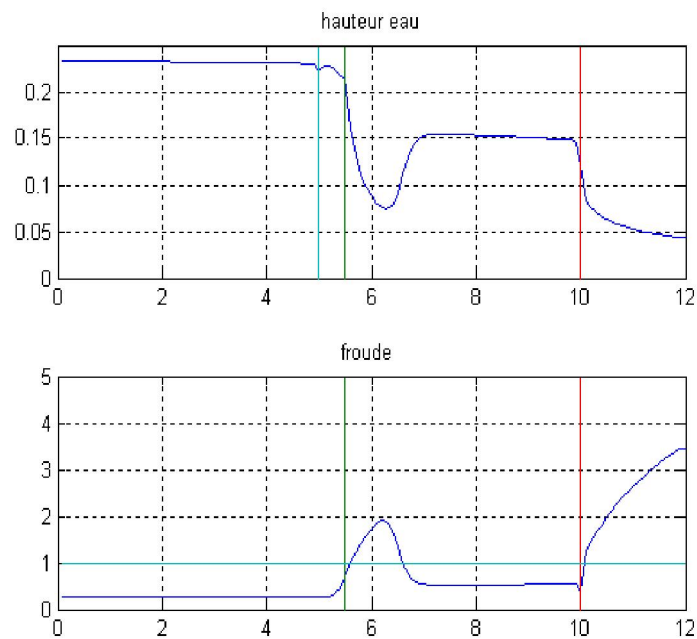


HYDRODYNAMIQUE DE L'ENVIRONNEMENT

Modélisation des Equations de Saint-Venant



Synthèse du travail

Par

**Quentin ARAUD
Renaud CHAMPREDONDE**

SOMMAIRE

SOMMAIRE	2
TABLE DES ILLUSTRATIONS	3
1. INTRODUCTION	4
2. SAINT-VENANT HOMOGENE	4
2.1. Les équations	4
2.2. Le programme	5
2.2.1. Les paramètres d'entrés.....	5
2.2.2. Les différents schémas	5
2.2.3. Les variables conservées.....	6
2.2.4. Initialisation	6
2.2.5. Boucle temporelle	6
2.2.6. Condition CFL	6
2.2.7. La boucle spatiale et les différents schémas.....	7
2.2.8. Les conditions aux limites	8
2.2.9. Tracé et animation	8
2.3. Les résultats des différents schémas et pour les différentes solutions.....	9
2.3.1. Rupture de barrage	9
2.3.2. Mascaret	12
2.4. Validation des expériences	14
2.4.1. Rupture de barrage	15
2.4.2. Mascaret	15
2.5. Influence de la CFL	16
3. SAINT-VENANT DANS UN CANAL AVEC PENTE ET FROTTEMENTS	17
3.1. Les équations.....	17
3.2. Le canal expérimental	17
3.3. La programmation	18
3.3.1. La géométrie	18
3.3.2. Les conditions initiales et limites	19
3.3.3. La méthode de pas fractionné.....	19
3.3.4. Le seuil.....	20
3.4. Comparaison de différentes grilles	20

3.5.	Résultats dans le cas stationnaire.....	22
3.6.	Solution discontinue	23
3.6.1.	Variation de la hauteur du seuil.....	23
3.6.2.	Variation du débit d'entrée	24
3.6.3.	Changement du lieu du seuil.....	25
4.	CONCLUSIONS	26

TABLE DES ILLUSTRATIONS

Figure 1 :	Hauteurs d'eau pour $m=1$ et $m=50$	9
Figure 2 :	Hauteurs d'eau pour $m=100$ et $m=150$	9
Figure 3 :	Hauteurs d'eau pour $m=1$ et $m=50$	10
Figure 4 :	Hauteurs d'eau pour $m=100$ et $m=200$	11
Figure 5 :	Hauteurs d'eau pour $m=1$ et $m=50$	11
Figure 6 :	Hauteurs d'eau pour $m=100$ et $m=150$	12
Figure 7 :	Hauteurs d'eau pour $m=1$ et $m=100$	13
Figure 8 :	Hauteurs d'eau pour $m=1$ et $m=100$	13
Figure 9 :	Hauteurs d'eau pour $m=50$ et $m=100$	14
Figure 10 :	Hauteurs d'eau pour $m=50$ et $m=125$	15
Figure 11 :	Hauteurs d'eau pour $m=1$ et $m=50$	15
Figure 12 :	Hauteurs d'eau pour $m=125$, $CFL=0.95$ et $m=500$, $CFL=0.1$	16
Figure 13 :	Veine expérimentale vue de dessus.....	18
Figure 14 :	Hauteurs d'eau pour $m=100$ et $n_x=120$ et $m=100$, $n_x=600$	21
Figure 15 :	Hauteur, Froude, Débit pour $m=15000$ avec pente = $\pi/48$	22
Figure 16 :	Hauteurs d'eau pour $m=150$, $h_{\text{seuil}}=0.09$ et $m=1000$, $h_{\text{seuil}}=0.09$	23
Figure 17 :	Hauteurs d'eau $m=150$, $h_{\text{seuil}}=0.09$, $Q_0=25$ l/s et $m=1000$, $h_{\text{seuil}}=0.09$, $Q_0=25$ l/s	24
Figure 18 :	Hauteurs, Froude, Débit pour $m=2000$ avec pente= $\pi/6$	25

1. INTRODUCTION

Le ressaut hydraulique, les écoulements super critiques, les détentés et les ondes de propagations sont des phénomènes naturels et communs pour les étudiants en hydrauliques et mécaniques des fluides de l' ENSEEIHT. Ils ont pu les observés une multitude de fois dans le canal expérimentale de leur école.

2. SAINT-VENANT HOMOGENE

2.1. Les équations

Les équations de Saint Venant proviennent des équations de Navier Stokes simplifiées grâce à certaines hypothèses. On fait notamment ici l'hypothèse que l'écoulement est peu profond. Les écoulements étudiés durant ce mini projet se produisent dans des canaux ou des rivières. Par conséquent, l'hypothèse est vérifiée. Dès lors la vitesse de propagation d'une onde va dépendre de la hauteur d'eau, ce qui n'est pas le cas dans des milieux très profonds comme l'océan. On va donc intégrer le champ de vitesse sur la hauteur pour obtenir un champ moyen. De ces hypothèses résulte le fait que la distribution de pression est hydrostatique. Pour obtenir les équations de Saint Venant homogènes, on réalise un certain nombre d'hypothèses supplémentaires :

- on considère le fluide comme parfait (on néglige donc les frottements)
- on néglige les tensions de surface eau/air
- le fond est plat (pas de pente), et on néglige les frottements sur le fond
- hypothèse d'écoulement peu profond

Dès lors on obtient les équations suivantes :

$$h, hu_x = 0$$

$$u, uu_x - gh_x = 0$$

Les variables qui vont être conservés dans cet écoulement sont h et hu. On peut ainsi traduire la conservation de la masse à l'aide de ces deux variables :

$h, hu_x = 0$, ainsi que la conservation de la quantité de mouvement :

$$hu, hu^2 - \frac{1}{2}gh^2_x = 0$$

Le programme simulant des écoulements de ce type est basé sur la résolution à l'aide de la méthode des volumes finis de ces équations.

2.2. Le programme

Objectifs : Le programme a pour but de simuler grâce à la résolution des équations de Saint Venant des écoulements dont la dynamique est connue, notamment des mascarets ou des ruptures de barrage. Nous avons mis en place un programme comportant différents schéma de résolution et laissant à l'utilisateur la possibilité de simuler et d'observer sous Matlab l'écoulement voulu.

2.2.1. Les paramètres d'entrés

```
%parametre du programme a rentrer  
  
dx = 0.05;    % pas en espace  
nx = 200;    % nombre de pas  
cfl=0.9;     % condition CFL  
m=200;      % nombre de pas de temps  
h0=1;       % hauteur initiale a gauche  
h1=0.1;     % hauteur initiale a droite  
u0=0;       % vitesse initiale a gauche  
u1=0;       % vitesse initiale a droite  
g=1;        % constante de gravité
```

Dans un premier temps l'utilisateur doit fournir un certain nombre de données correspondant à l'écoulement voulu. Il rentrera ainsi les hauteurs à gauche et à droite du milieu du canal, les vitesses à gauche et à droite ainsi que le nombre d'itérations en temps, et le nombre ainsi que la valeur des pas d'espace. Dans l'exemple sur notre gauche, l'utilisateur veut observer une rupture de barrage, avec une hauteur d'eau de 0,1 mètres à gauche, et des vitesses nulles en tout point de l'écoulement.

2.2.2. Les différents schémas

```
%schéma  
%schéma amont : 1  
%schéma centre : 2  
%schéma lax-wendrof : 3  
%schéma couplé: 4  
schema=4;
```

Une variable « schéma » a été créé afin de donner à l'utilisateur la possibilité de choisir le schéma avec lequel les équations vont être résolues. Le schéma amont, comme son nom l'indique ne prend en compte pour les calculs que les valeurs de h et du h_u au point i et $i-1$. Ainsi l'information se propage de l'amont vers l'aval. En cas

de perturbations en aval, l'amont ne sera jamais informé de son existence. Le schéma centré prend en compte les valeurs de h et de hu aux points $i-1$, i et $i+1$. Dès lors, l'information pourra se propager en amont et en aval. Le schéma de Lax Wendrof prend aussi en compte l'information en ces différents points, mais avec une autre méthode de calcul. Les simulations avec ce schéma sont plus rapide, mais plus oscillant à cause de la diffusion numérique. En couplant ces deux derniers schémas, nous obtenons un schéma couplé performant. Le programme pourra donc ainsi choisir le schéma correspondant au choix de l'utilisateur à l'aide d'un « switch ».

2.2.3. Les variables conservées

```
%initialisation
q1=finit(x,h0,h1,u0,u1);
q2=zeros(size(q1));
```

Comme annoncé précédemment dans la théorie, les variables qui sont conservées lors de ces écoulements sont la hauteur h et la variable hu . Nous avons donc créée une matrice q tel que $q(1,:)$ représente la hauteur et $q(2,:)$ représente le produit hu . C'est cette variable qui va « subir » les calculs à travers les différents schémas. Il faut donc l'initialiser.

2.2.4. Initialisation

Nous avons ainsi créée un sous programme intitulé « initialisation » et dont le rôle est comme son nom l'indique d'initialiser la variable q . Ainsi grâce à deux boucles « for », la variable q se remplit de l'information h_0 , h_1 , h_0u_0 et h_1u_1 .

2.2.5. Boucle temporelle

Pour calculer l'évolution des l'écoulement, nous avons discrétisé les équations en temps et en espace. A chaque pas de temps, nous allons calculer la valeur de q en tous les points de l'espace. Il y aura donc une boucle spatiale dans la boucle temporelle.

2.2.6. Condition CFL

```
for j= 1:m
    h=cfl*1/max(abs(q1(2,:))./q1(1,:)+(g*q1(1,:)).^0.5));
```

On a appelé h la variable $\frac{t}{x}$. Cette variable doit être plus petite que la vitesse de propagation de l'information. Cette dernière ira au plus vite à la vitesse \sqrt{gh} . Ainsi on calcul la valeur de la vitesse la plus importante de l'écoulement qu'on inverse pour avoir la valeur la plus importante possible de h . Pour ne pas avoir h égale à l'inverse de la vitesse de propagation la plus importante, on multiplie cette dernière par une constante appelée dans ce programme CFL tel que $CFL < 1$.

2.2.7. La boucle spatiale et les différents schémas.

```
for i=2:nx
    q2(:,i)=q1(:,i)-h*(flux_sv(q1(:,i))-flux_sv(q1(:,i-1)));
```

Nous avons donc calculé q_2 représentant q à l'instant $t+1$ à partir de q_1 représentant q à l'instant t . Ici, nous utilisons le sous programme `flux_sv` qui calcul le flux de q . Nous observons que dans l'équation nous réalisons la soustraction de `flux_sv(q1(:,i))-flux_sv(q1(:,i+1))`. Nous sommes donc dans le schéma amont. Le sous programme `flux_sv` est détaillé ci-dessous :

```
function out=flux_sv(u)
g=1;

y(1)=u(2);
y(2)=u(2)^2/u(1)+g/2*u(1)^2;

out=y';
```

Il traduit la conservation des deux variable h et hu grâce à leur équation de conservation détaillé dans la théorie. Ces ainsi que sont calculés les informations dans la méthode des éléments finis.

Nous pouvons aussi calculer la valeur de q_2 grâce à d'autres schémas, notamment centré, de Lax Wendrof et couplé. Pour cela, nous avons crée d'autres sous programme qu'il a suffit de remplacer dans la boucle spatiale à la place de « `flux_sv` ». Ces sous programmes sont détaillés ci dessous :

schéma centré :

```
q2(:,i)=q1(:,i)-h*(flux_centre(q1(:,i),q1(:,i+1),h)-
    flux_centre(q1(:,i-1),q1(:,i),h));

function out=flux_centre(u,v,h)

out=0.5*(flux_sv(u)+flux_sv(v))-1/(2*h).*(v-u);
```

Nous pouvons voir qu'ici flux centré fait appel aux valeurs de q_1 aux points i , $i+1$ et $i-1$. « flux_sv » est encore présent à l'intérieur des programmes, et permet encore une fois d'introduire les équations de conservations de ces variables.

Schéma de Lax-wendroff :

```
q2(:,i)=q1(:,i)- h*(flux_centre_wendrof(q1(:,i),q1(:,i+1),h)-
    flux_centre_wendrof(q1(:,i-1),q1(:,i),h));

function out=flux_centre_wendrof(u,v,h)

w=1/2*(u+v)-h/2*(flux_sv(v)-flux_sv(u));
out=flux_sv(w) ;
```

Schéma couplé :

```
for i=2:nx
    q2(:,i)=q1(:,i)-h*(flux_centre(q1(:,i),q1(:,i+1),h)-
        flux_centre(q1(:,i-1),q1(:,i),h));
    q3(:,i)= q1(:,i)- h*(flux_centre_wendrof(q1(:,i),q1(:,i+1),h)-
        flux_centre_wendrof(q1(:,i-1),q1(:,i),h));

q4=0.5.*(q2+q3);
```

Pour réaliser le schéma couplé, il suffit de faire une « moyenne » des variables q_2 calculées à travers les schéma centré et Lax Wendroff.

2.2.8. Les conditions aux limites

```
q2(:,1)=q2(:,2);
q2(:,nx+1)=q2(:,nx);
```

Pour déterminer complètement q_2 il faut avoir que l'utilisateur entre des conditions aux limites. Nous avons donc mis comme conditions limites une condition de sortie libre, qui se traduit par une dérivée du flux entrant/sortant nulle. On aura donc q_2 qui sera identique aux points 1 et 2, ainsi qu'en « $nx+1$ » et « nx ».

2.2.9. Tracé et animation

```
plot(x,q2(1,:));
    F(j)=getframe;

movie(F,m)
```


Nous avons décidé d'observer les résultats de la simulation sous forme de graphiques, tracés sous Matlab. Comme la simulation calcule l'évolution de l'écoulement à différents temps, une animation semblait la bienvenue. Dans le programme j représente le pas de temps. On aura donc autant de graphes que de nombre de pas de temps. Le programme « movie » intrinsèque à Matlab permet de faire défiler les images. Nous noterons aussi que nous représentons $q_2(1,i)$, c'est à dire la hauteur.

2.3. Les résultats des différents schémas et pour les différentes solutions

2.3.1. Rupture de barrage

Schéma de Lax Friedrich (centré) :

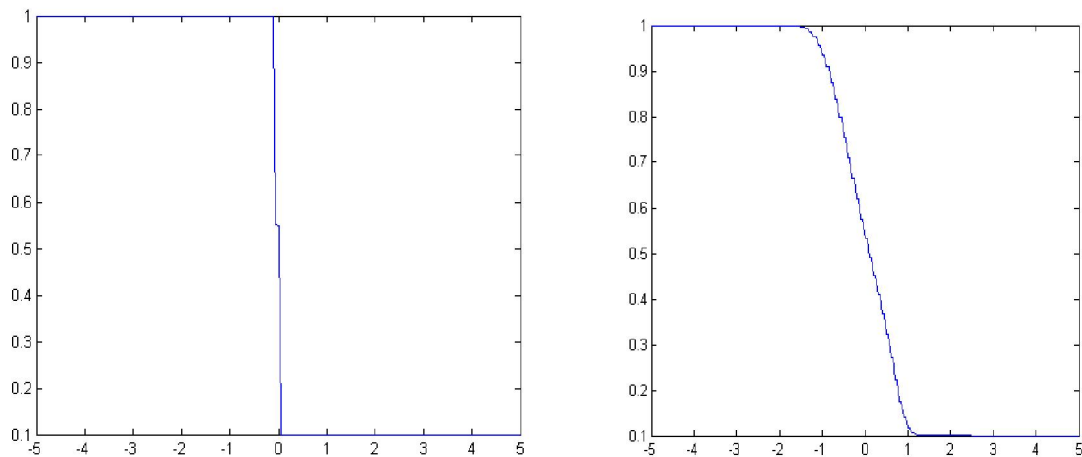


Figure 1 : Hauteurs d'eau pour $m=1$ et $m=50$

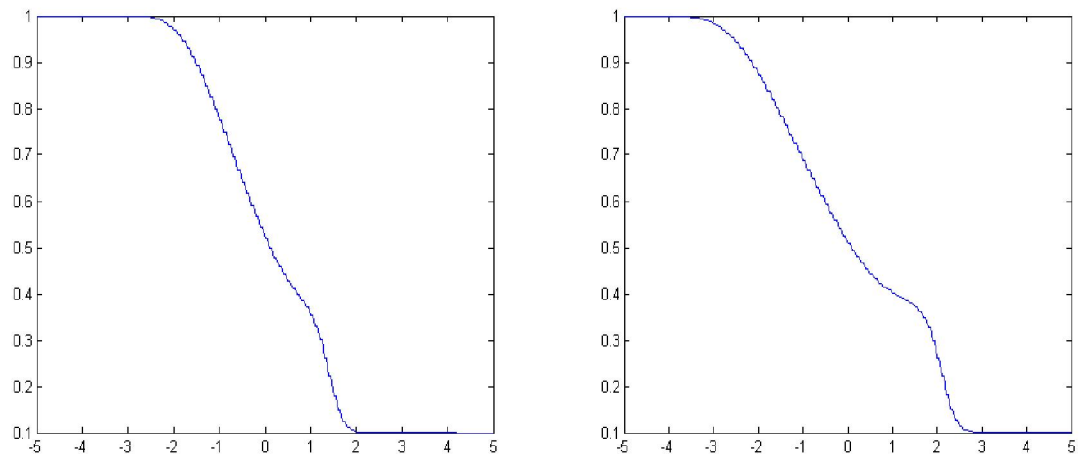


Figure 2 : Hauteurs d'eau pour $m=100$ et $m=150$

Observations :

on observe bien sur ces graphiques représentant la hauteur d'eau en fonction de x et à des instants différents, la rupture de barrage. La hauteur est différente à droite et à gauche, et à l'instant initial, les vitesses sont nulles. On observe bien ce qu'affirme la théorie. La forme de la perturbation qui se propage vers l'amont est classique d'une détente. C'est une perturbation qui s'élargit avec le temps et en se propageant. Dès lors les variations de hauteur seront de moins en moins brutales vers l'amont. Vers l'aval, l'onde qui se propage est une onde de compression. Très vite, il se forme un choc brutal, un ressaut. La variation de hauteur d'eau devient très rapide et brutale. Ce schéma de Lax-Friedrich propose une solution réaliste. On peut remarquer que le signal de sortie est légèrement « bruité », le trait n'est pas net. De plus ce schéma donne une solution très dissipative numériquement. En effet, le ressaut devrait être représenté par un mur clair. On peut ici observer une droite de pente importante, mais qui ne forme pas un angle droit avec le sol. De plus, la ligne d'eau dans la zone située entre l'onde de détente et l'onde de compression devrait être plate. Elle n'est pas très observable à travers ce schéma.

Schéma de Lax Wendroff :

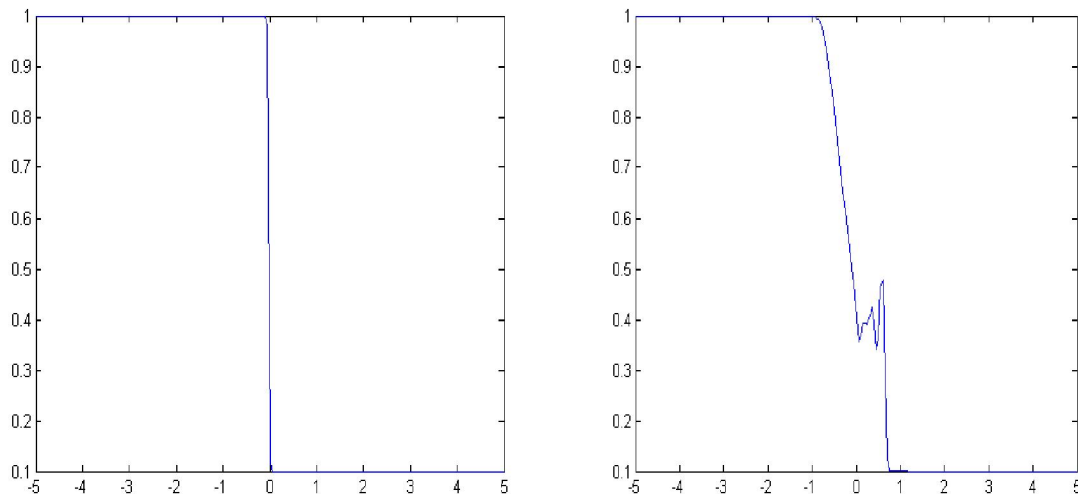


Figure 3 : Hauteurs d'eau pour m=1 et m=50

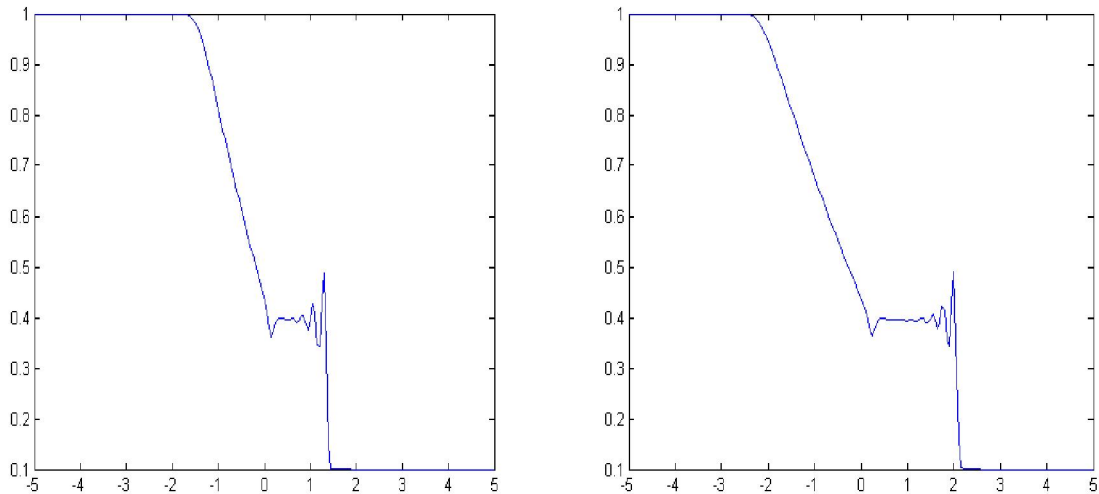


Figure 4 : Hauteurs d'eau pour $m=100$ et $m=200$

Observations : Ce schéma aussi fourni une simulation relativement réaliste. Le trait grâce au schéma de Lax-Wendroff est plus précis et continu que le trait avec le schéma de Lax Friedrich. De plus, ce schéma est moins dissipatif que le précédent. Les ondes sont moins étalées, et la géométrie de la ligne d'eau est plus nette est plus proche de la réalité. Cependant, ce schéma crée une divergence numérique. Les gradients trop importants entre les hauteurs et les vitesses que génèrent ce schéma est créent en contre partie des oscillations après par exemple la singularité qu'est le choc. Il y a une sorte de diffusion numérique qui se crée. L'idée est donc que combiner dans un schéma dit couplé différentes qualités des deux schémas.

Schéma couplé :

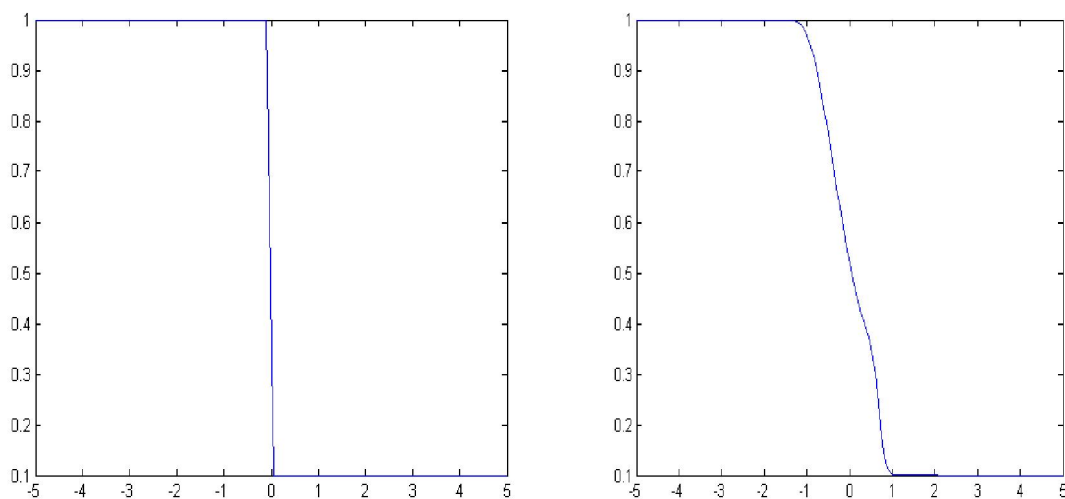


Figure 5 : Hauteurs d'eau pour $m=1$ et $m=50$

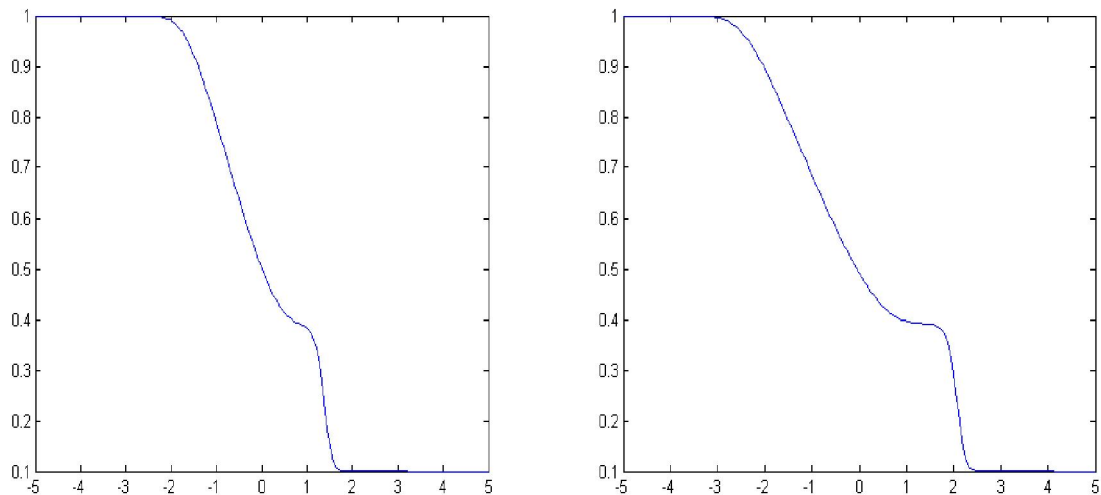


Figure 6 : Hauteurs d'eau pour m=100 et m=150

Observations : Ce schéma couplé semble être la simulation la plus proche de la réalité et clair sur les trois schémas présentés. En effet, le trait est net, les pentes des singularités sont un peu moins franches qu'avec le schéma de Lax Wendroff, mais les oscillations liées à la diffusion numérique ne sont plus visibles. Ce schéma étant le plus satisfaisant nous allons l'utiliser afin de valider le code réalisé avec des solutions exactes existantes.

2.3.2. Mascaret

Nous allons maintenant tester notre programme sur le cas du mascaret. À la différence de la rupture de barrage, dans le cadre du mascaret l'utilisateur ne rentrera que la hauteur aval et la hauteur amont de l'écoulement. La vitesse du mascaret sera ensuite déduite par des relations de conservation. En effet, grâce à la différence de hauteur on peut calculer la vitesse de propagation du mascaret,

$w = \frac{g h_0 h_1}{2 h_1}$. De cette dernière, on calcule la vitesse de l'eau en amont :

$u_0 = w \left(1 - \frac{h_1}{h_0} \right)$. Nous allons dans un premier temps regarder si les solutions proposées

par les trois schémas sont cohérentes et proches du résultat voulu avant de choisir le schéma qui fournit la solution la plus satisfaisante.

schéma de Lax Friedrich (centré) :

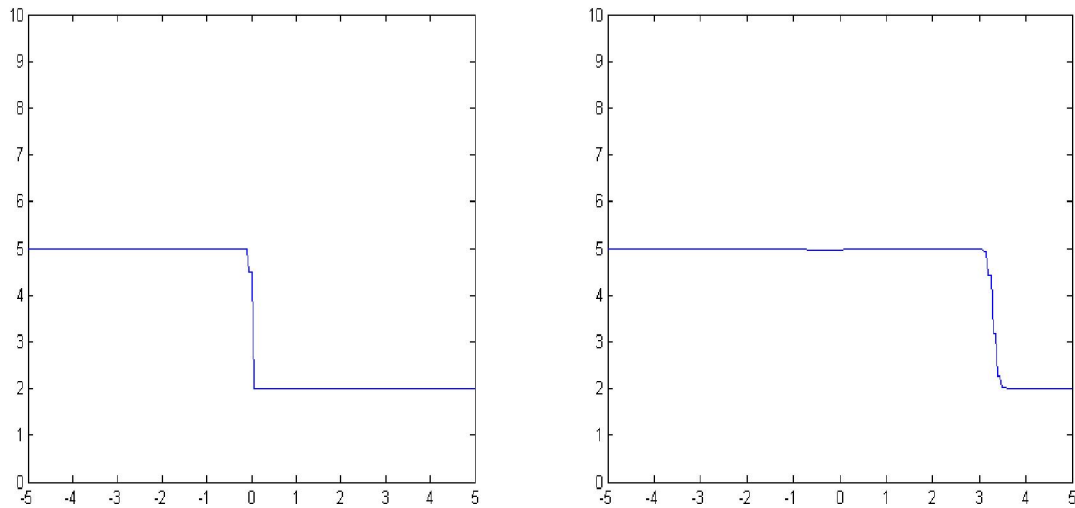


Figure 7 : Hauteurs d'eau pour $m=1$ et $m=100$

Observations :

On observe bien le phénomène de mascaret sur ces deux graphes. La perturbation, ici rapide variation de la hauteur d'eau, qui se propage à la vitesse constante sans se déformer (théoriquement). Nous pouvons remarquer que, effectivement le mascaret est bien simulé à l'aide du schéma de Lax Friedrich. Cependant, comme précédemment, les traits ne sont pas vraiment continus lors de singularité, et nous pouvons observer un phénomène de dissipation numérique. En effet, la singularité est de moins en moins pentue avec le temps.

Schéma de Lax Wendroff :

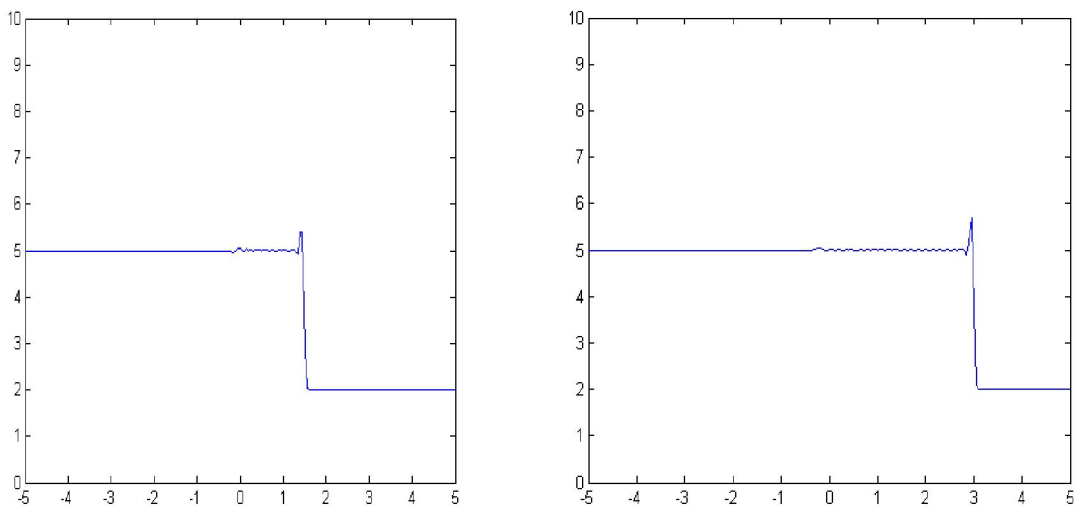


Figure 8 : Hauteurs d'eau pour $m=1$ et $m=100$

Observations :

Nous observons bien encore un fois aussi le phénomène de mascaret. Comme dans le cas de rupture de barrage, le schéma de Lax wendroff introduit de la diffusion numérique en créant des oscillations après la singularité. Comme précédemment ce schéma n'est pas très dissipatif.

Schéma couplé :

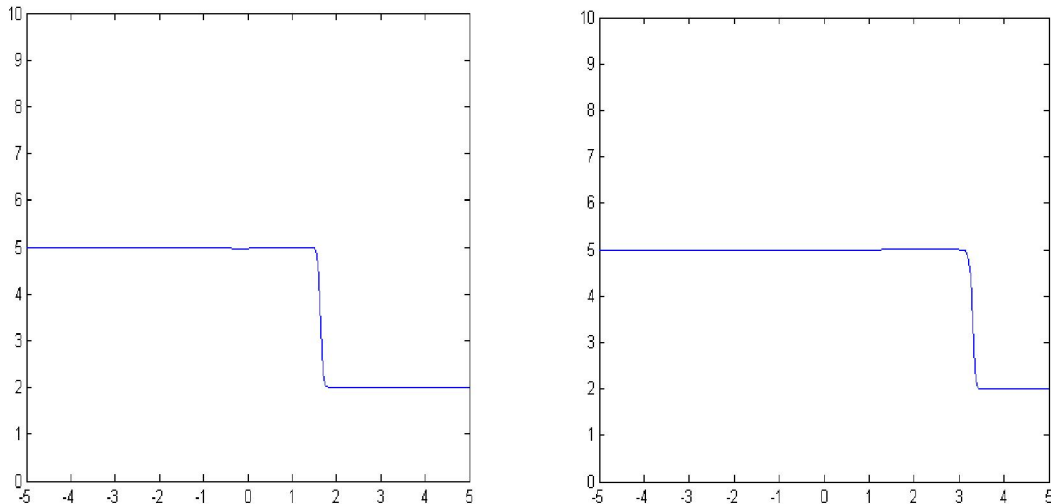


Figure 9 : Hauteurs d'eau pour m=50 et m=100

Observations : Comme pour le cas de la rupture de barrage, le schéma couplé est la meilleure solution proposée par le programme. Il est un bon compromis entre l'effet de dissipation et de diffusion numérique. Nous allons donc valider notre programme à l'aide de ce schéma couplé, en comparant la solution simulée avec la solution exacte.

2.4. Validation des expériences

Pour valider les différentes expériences, il faut vérifier que les vitesses de propagation des ondes calculées à l'aide du programme et du schéma couplé correspondent aux vitesses proposées par la théorie. Cette dernière a été exposée précédemment. Il faut vérifier que le ressaut se déplace à la vitesse

$$w = \frac{gh_0}{2h_1} \frac{h_0 - h_1}{h_1}$$

. Nous avons donc rajouté un petit programme qui va placer en rouge la position du ressaut proposé par la théorie. Il faut pour valider notre modèle que cette position corresponde à la position simulée par le programme.

2.4.1. Rupture de barrage

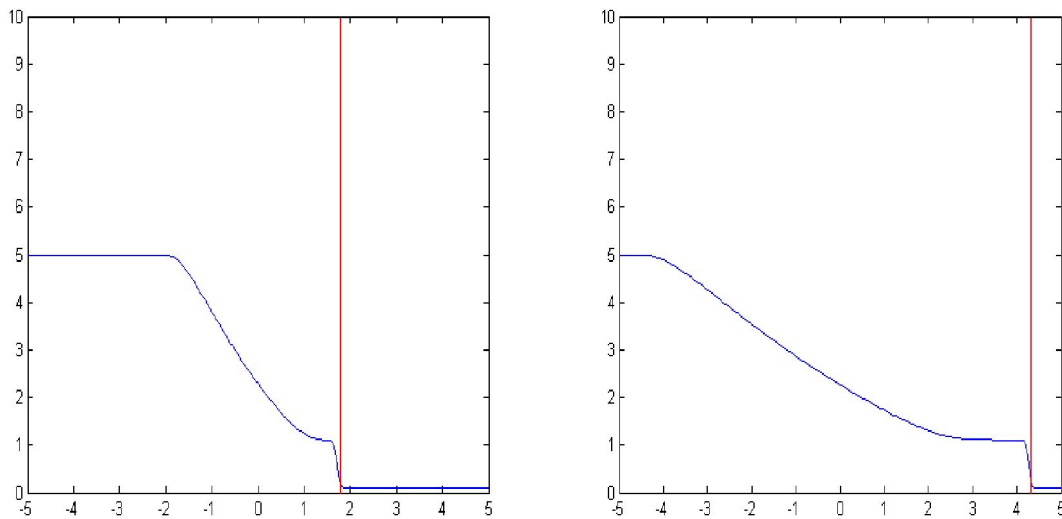


Figure 10 : Hauteurs d'eau pour $m=50$ et $m=125$

On constate bien que ressaut crée lors de la rupture de barrage se déplace à la vitesse suggérée par la théorie. En effet la droite rouge met en valeur la position théorique du ressaut, en prenant en compte la hauteur d'eau à droite et à gauche de ce dernier.

Nous pouvons donc considérer que la solution exacte de la rupture de barrage valide ce code de calcul concernant les équations de Saint Venant homogène.

2.4.2. Mascaret

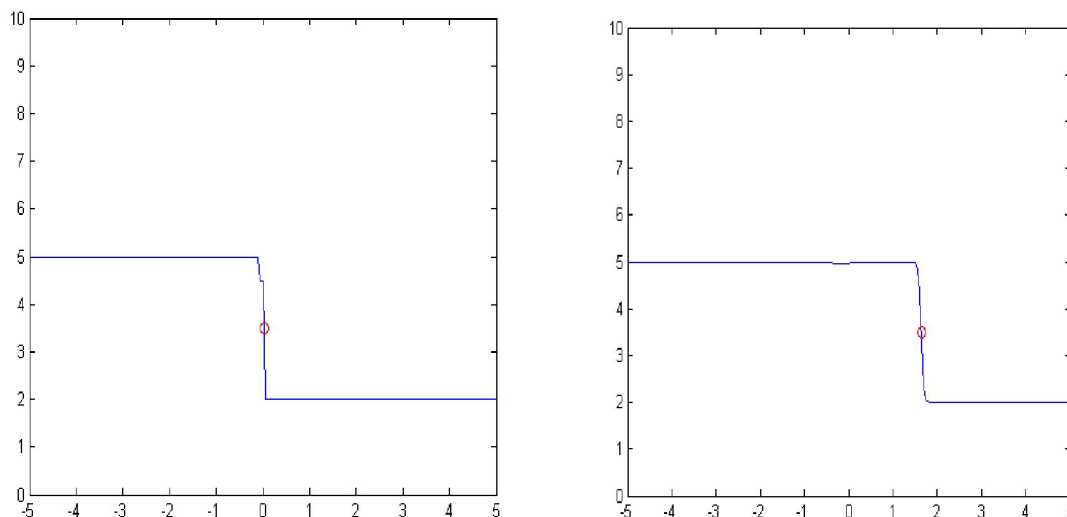


Figure 11 : Hauteurs d'eau pour $m=1$ et $m=50$

On constate bien que ressaut crée par le mascaret se déplace à la vitesse suggérée par la théorie. En effet le point rouge met en valeur la position théorique du ressaut, en prenant en compte la hauteur d'eau à droite et à gauche de ce dernier.

Nous pouvons donc considérer que la solution exacte du mascaret valide ce code de calcul concernant les équations de Saint Venant homogène.

2.5. Influence de la CFL

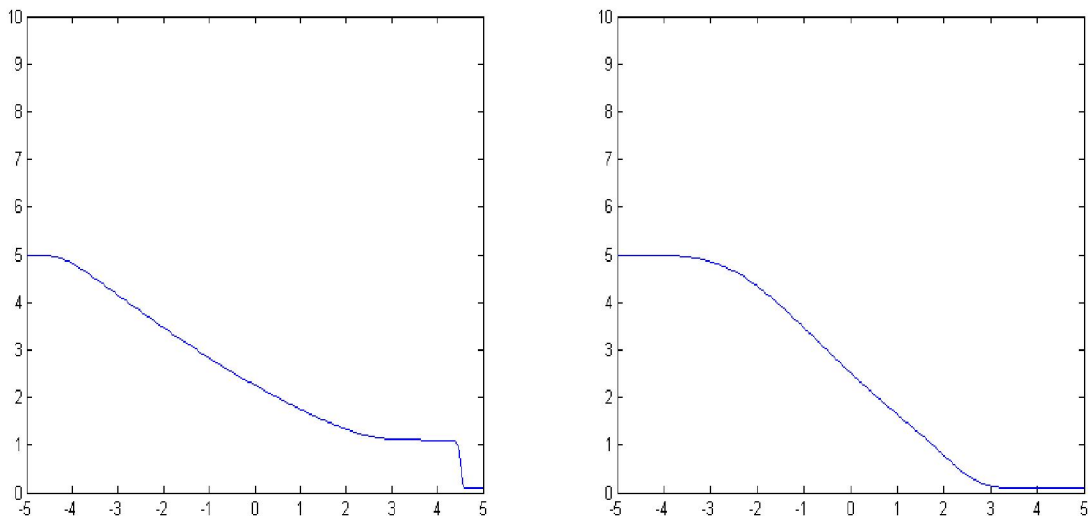


Figure 12 : Hauteurs d'eau pour $m=125$, $CFL=0.95$ et $m=500$, $CFL=0.1$

Nous allons maintenant regarder l'influence de la condition CFL, coefficient multiplicatif qui nous permet de calculer le pas de temps Δt . Pour cela, on va comparer deux différents CFL pour le schéma couplé.

Observations :

On remarque bien en comparant ces deux graphiques l'importance des CFL. Plus le coefficient CFL est petit, plus les singularités sont « gommées ». On se rend bien compte ici que le ressaut hydraulique n'est même plus visible lorsque que le coefficient est trop petit. Ceci peut être un avantage dans les situations avec un très forte diffusion numérique, qui pourrait faire diverger le schéma, mais ici une trop faible CFL est un inconvénient car il ne rend plus compte de la réelle géométrie de la ligne de remous.

De plus on remarque que plus CFL petit, plus le pas de temps Δt sera petit, donc plus le nombre d'itérations pour aller à un instant voulu sera important. Ceci est aussi un inconvénient, car le temps de calcul devient vite très important.

3. SAINT-VENANT DANS UN CANAL AVEC PENTE ET FROTTEMENTS

3.1. Les équations

Dans ce cas, nous allons aussi utiliser les équations de Saint Venant mais sous d'autres hypothèses. En effet, par rapport au cas précédent, nous ne considérons pas que le fond est plat, ni que l'écoulement se fait sans frottement. De plus on va considérer que l'écoulement se produit dans un canal dont le profil du lit est connu. Les variables qui vont être conservées dans ce cas ne sont plus h et h_u , mais la section de passage du fluide A et le débit Q . La section A dépend de la position x le long du canal ainsi que la hauteur d'eau en ce point et à un instant donné. De même Q dépend de la position x et du temps. Les variables conservées sont régies par les équations suivantes :

- $A, \zeta_x = q$, qui traduit la conservation de la masse

- $Q, \zeta \frac{1}{2} \frac{g}{b} A^2_x = g I_2 - g S_0 - S_f$, qui traduit la conservation de l'énergie q

désigne les apports d'eau telle que la pluie, ou les infiltrations d'eau. On ne considérera que $q=0$. De plus b représente la section mouillée. $I_2 = \frac{gA}{b} \frac{db}{dx}$

Représente les pressions exercées par le profil sur l'écoulement, « S_0 » les forces liées à la pente et « S_f » les forces de frottements, calculés grâce aux lois de Chézy.

3.2. Le canal expérimental

Il nous est demandé de tester le programme simulant les équations de Saint Venant sur un canal ayant la même géométrie que le canal expérimental de l'ENSEEIHT. Il sera ainsi possible de comparer les résultats obtenus par simulation numérique à ceux obtenus expérimentalement lors du TP intitulé Canal Supersonique.

Voici la géométrie du canal :

Veine expérimentale vue du dessus

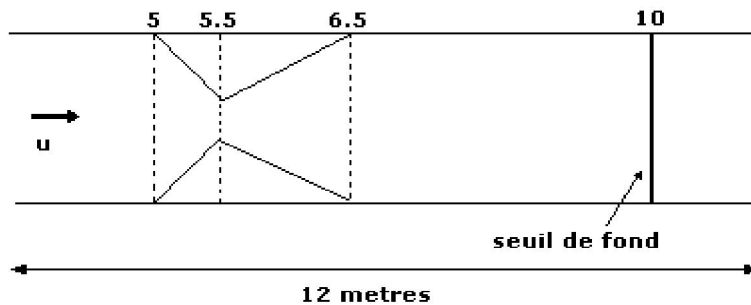


Figure 13 : Veine expérimentale vue de dessus

Le principe du Travail Pratique est d'accélérer l'écoulement par un système de convergent divergent, et de faire ainsi passer l'écoulement en super critique.

3.3. La programmation

La programmation ne va pas de nouveau être étudiée dans sa totalité car une grande partie ressemble au programme précédent. En effet, les équations de conservation des variables restent les mêmes à un coefficient multiplicatif près, simplement les variables conservées ne sont pas les mêmes. Précédemment, q était un vecteur composé de h et h_u . Ici q devient un vecteur composé de A et Q . Cependant les différences majeures vont être présentées ici plus précisément.

3.3.1. La géométrie

```
%boucle de calcul de bs
for i=1:na
    bs(i)=largeur;
end

for i=na:nb
    bs(i)=((s_passage-largeur)/(b-a)*(i-
na)*dx+largeur);
end

for i=nb:nc
    bs(i)=((largeur-s_passage)/(c-b)*(i-
nb)*dx+s_passage);
end

for i=nc:ne
    bs(i)=largeur;
end
```

Le but de ce programme est de calculer la largeur de la section mouillée. Les différents entiers n_a , n_b , n_c , n_e représentent le lieu où se situent les singularités de la géométrie. En a se situe le début du convergent, en b se situe la section de passage, c la fin du divergent et e la position du seuil de fond.

3.3.2. Les conditions initiales et limites

On considère en conditions initiales que le débit en chaque point vaut le débit d'entrée Q_0 . De plus la hauteur initiale en tout point de l'écoulement est rentrée par l'utilisateur. Pour les conditions aux limites, nous procéderons de la même manière que dans le cas de Saint Venant homogène, le flux de q à l'entrée et à la sortie doit être nul. Cependant, nous rentrons comme débit en entrée Q_0 . Donc on aura $q_2(2,1)=Q_0$.

3.3.3. La méthode de pas fractionné.

```
%boucle terme source
for i=1:ne
    q5(1,i)=q4(1,i);
    q5(2,i)=q4(2,i)+dx*h*s(q4(1,i),q4(2,i),bs(1,i),bs(1,i+1));
    source(i)=s(q4(1,i),q4(2,i),bs(1,i),bs(1,i+1));
end
```

La méthode utilisée précédemment pour résoudre les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement était possible par conservation des variables car aucun terme source n'intervenait dans les équations. Ce n'est plus le cas ici, car même s'il n'y a pas d'apport de matière, il y a apport de quantité de mouvement aussi bien par les frottements, que la géométrie du canal qui va induire des pressions sur le fluide ou les effets de pente. Nous allons donc procéder exactement de la même manière que précédemment. Une boucle en espace va être intégrée dans la boucle temporelle. Une première boucle va résoudre les schémas comme si les équations étaient homogènes dans un premier temps. Il va ressortir de cette opération un vecteur q_4 . Puis nous allons créer un vecteur q_5 résultat de la simulation à travers le schéma représentant l'équation : $\frac{dq}{dt} = s \cdot t$. s est ici un sous programme qui va calculer la valeur du terme source en chaque point de l'écoulement.

3.3.4. Le seuil

```
%boucle pour le seuil
q5(1,nd)=q4(1,nd);
q5(2,nd)=q4(2,nd)+dx*h*(s(q4(1,nd),q4(2,nd),bs(1,nd),bs(1,nd+1))-
    g*q4(1,nd)*hauteur_seuil/dx);
q5(1,nd+1)=q4(1,nd+1);
q5(2,nd+1)=q4(2,nd+1)+dx*h*(s(q4(1,nd+1),q4(2,nd+1),bs(1,nd+1),
    bs(1,nd+2))+g*q4(1,nd+1)*hauteur_seuil/dx);
```

Dans la programmation, il nous est demandé de modéliser un seuil. On a penser modéliser ce dernier par un « triangle » formé par le fond. En effet, les équations permettent de rendre compte d'une variation de la côte du fond. Nous avons donc penser pour réaliser le seuil faire une pente de coefficient directeur $\frac{dz}{dx} = \frac{h_{seuil}}{dx}$, où « dx » représente le pas d'espace. Donc au lieu correspondant au seuil, nous faisons monter le fond de « h_seuil », puis au pas d'espace suivant, on refait descendre notre pente d'une hauteur – « h_seuil ».

3.4. Comparaison de différentes grilles

Nous allons exposer ici les résultats proposés par la simulation. Nous n'avons pas comme dans le cas précédent détaillé tous les différents schémas et leurs impacts sur les solutions comme dans le cas de Saint Venant homogène. Nous savons d'ores et déjà que pour résoudre des équations de conservation, le schéma de Lax Friedrich est dissipatif, que le schéma de Lax Wendroff est dispersif, et que par conséquent le meilleur compromis est la moyenne des deux schémas. Le programme élaboré donne la possibilité à l'utilisateur de choisir le schéma qu'il préfère pour les simulations. Cependant, nous avons décidé de n'exposer que les résultats du schéma couplé. Ainsi nous allons vous présenté ci dessous la hauteur d'eau, le débit et le nombre de Froude en différents points de la tuyère en régime établi. Pour atteindre le régime stationnaire, il faut réaliser un grand nombre d'itération. En effet, lorsque l'on lance la simulation, les hauteurs d'eau étant les mêmes en tous points de l'écoulement, de même pour le débit, nous plaçons le système dans un état transitoire. En effectuant un très grand nombre d'itération nous allons obtenir la réponse en régime stationnaire.

Les expériences sont réalisées dans les conditions suivantes :

- H= 19cm
- Q0=14,6 l/seconde

- $H_{\text{seuil}}=0$

Nous avons choisi ces conditions initiales pour pouvoir comparer nos résultats simulés avec les résultats expérimentaux de nos collègues qui ont travaillé sur le TPLD « canal supersonique ».

Nous allons comparer l'influence de différents maillages sur les résultats. Prenons dans un premier temps $n_x=120$ puis $n_x=600$:

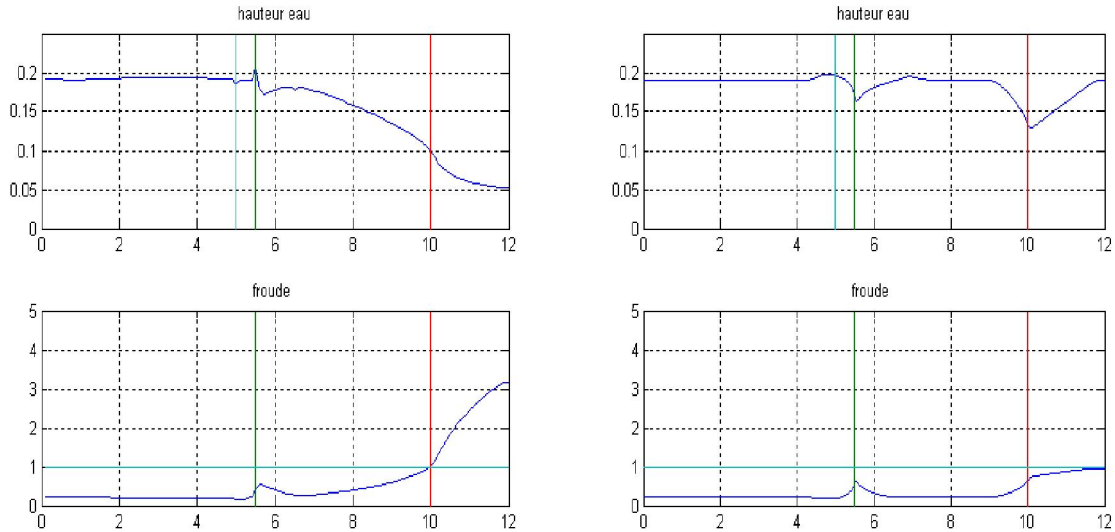


Figure 14 : Hauteurs d'eau pour $m=100$ et $n_x=120$ et $m=100$, $n_x=600$

Observations :

Nous pouvons observer que pour un même nombre d'itération et une discrétisation différente, l'écoulement ne se situe pas dans la même phase. On remarque en effet que t_1 correspondant à 100 itérations avec 120 points est plus grand que t_2 correspondant à 100 itérations avec 600 points.

Cependant, on peut remarquer que le résultat proposé pour le maillage de 600 est plus satisfaisant. En effet les variations dans le convergent et dans le divergent sont mieux mis en évidence.

D'un autre côté, nous avons comparé ici les deux maillages avec un certain nombre d'itérations identique pour les deux. Il aurait été intéressant de comparer les deux maillages en régime stationnaire. Le second maillage de 600 points demande un trop grand nombre de calculs pour les ordinateurs de l'ENSEEIHT. Par conséquent, les simulations deviennent trop longues pour atteindre le régime stationnaire avec ce maillage. Nous sommes donc contraints d'utiliser un maillage plutôt grossier pour pouvoir visualiser au mieux les variations dans les régimes stationnaires.

3.5. Résultats dans le cas stationnaire

Nous prendrons comme expliqué précédemment un nombre de point de 120 pour pouvoir atteindre le régime stationnaire. Par conséquent, les graphiques représentant le nombre de Froude et la hauteur d'eau ne seront pas toujours correcte, notamment dans le convergent.

Les droites de couleurs représentent les différentes singularités de la géométrie.

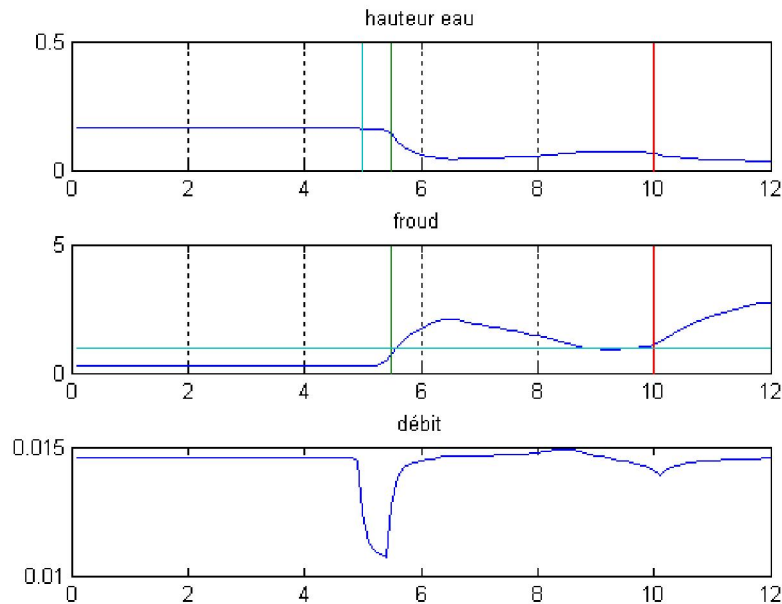


Figure 15 : Hauteur, Froude, Débit pour $m=15000$ avec pente = $\pi/48$

Observations :

Les résultats obtenus sont très satisfaisants. Dans ce cas ci il n'a pas de seuil. La pente après le seuil est de $\pi/48$. Elle est volontairement faible, pour ne pas avoir des vitesses trop importantes. En effet, plus les vitesses seront importantes, plus le « dt » associé va être petit. Cependant, la vitesse de l'écoulement après le seuil a un impact sur l'écoulement.

Le convergent divergent dans ce cas précis réalise parfaitement son rôle. Il accélère l'écoulement fluvial en amont. Après le col du convergent, l'écoulement devient bien torrentiel. On peut constater qu'effectivement le Froude devient supérieur à 1 après le col. De plus la courbe de remous semble correcte. En effet, l'écoulement étant fluvial en amont, la hauteur d'eau est constante, car nous sommes en stationnaire. Par contre, nous pouvons remarquer que la hauteur d'eau en torrentiel augmente progressivement, et que le Froude diminue. Ceci est dû à la non conservation de

l'énergie. Les frottements prélèvent de l'énergie cinétique de l'écoulement, et cela se traduit en stationnaire par une augmentation de la hauteur d'eau et une diminution du Froude. En effet, les niveaux ne peuvent pas s'égaliser car il n'y a plus d'échange d'information avec l'amont, car l'écoulement est super critique.

Nous pourrions peut être dans un second temps décaler le seuil, en le plaçant un peu plus vers l'aval, avec une pente plus importante après son passage afin de d'être plus proche de la réalité.

Nous pouvons remarquer sur le graphe que le débit d'entrée est égale au débit de sortie. On aura en effet, si on regarde en détaille sur la commande, $q_5(2,1)=q_5(2,n_x)=0,0146$.

On a donc bien conservation du débit.

3.6. Solution discontinue

3.6.1. Variation de la hauteur du seuil

On se place dans le cas précédent. On va donc prendre comme condition initiale le vecteur q proposé lors de la dernière simulation mettant en valeur le canal en régime stationnaire. Nous allons faire varier la hauteur du seuil. Nous allons le monter à une hauteur de 9 centimètres.

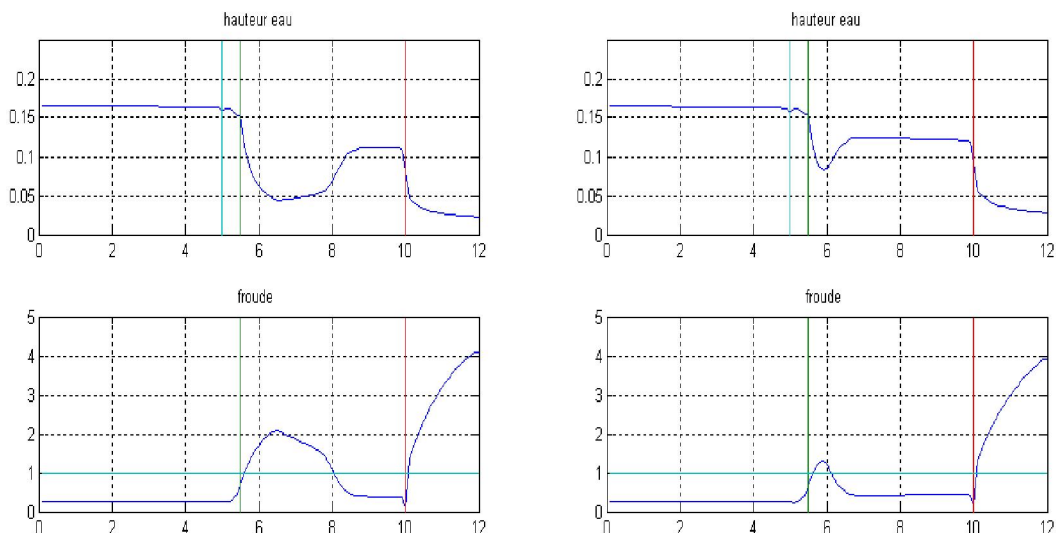


Figure 16 : Hauteurs d'eau pour $m=150$, $h_{seuil}=0.09$ et $m=1000$, $h_{seuil}=0.09$

Observations :

Dans un premier temps, on peut remarquer que le seuil a bien un impact sur l'écoulement. Il se crée soudainement une singularité au niveau du seuil. La hauteur

d'eau après diminue brusquement, et la vitesse de l'écoulement s'en retrouve accéléré.

En faisant varier la hauteur du seuil, on crée un ressaut hydraulique. Il est clairement observé lors de la simulation, aussi bien sur le graphe représentant le Froude, que sur le graphe représentant la hauteur. En effet, un brusque changement du Froude, avec le Froude >1 à un Froude <1 .

On remarque aussi que le ressaut va se déplacer de la droite vers la gauche.

Vérifions que les relations de saut sont bien respectées. On a ici $w = -1,23$ m/s. La vitesse de l'écoulement est de 1,17m/s au point le plus rapide, donc juste avant le ressaut. Donc, globalement le ressaut est presque fixe, car la différence entre le deux vitesses est négligeable.

3.6.2. Variation du débit d'entrée

On se place dans le cas précédent. On va donc prendre comme condition initiale le vecteur q proposé lors de la dernière simulation mettant en valeur le canal en régime stationnaire. Notre seuil est donc a une hauteur de 9 centimètres. On va maintenant faire varier le débit pour observer ce qu'il va se produire.

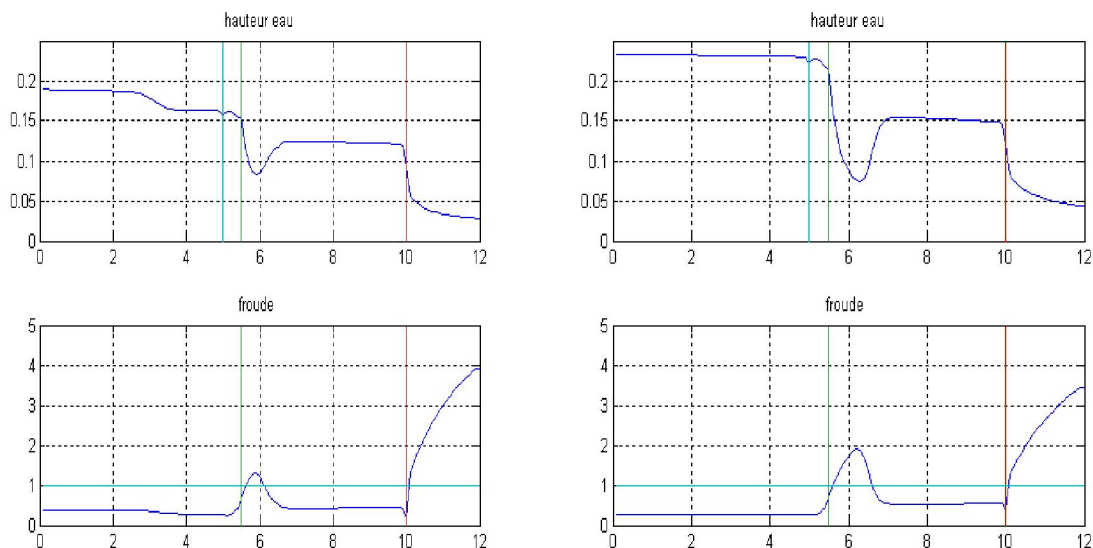


Figure 17 : Hauteurs d'eau $m=150$, $h_{\text{seuil}}=0.09$, $Q_0=25$ l/s et $m=1000$, $h_{\text{seuil}}=0.09$, $Q_0=25$ l/s

Observations :

On remarque dans un premier temps une onde qui se propage dans le milieu où l'écoulement est fluvial. Cela se traduit par une augmentation de la hauteur du début de la veine vers le convergent.

Après 1000 pas de temps, nous sommes à peu près en régime stationnaire. Le ressaut s'est stabilisé. On remarque que les hauteurs d'eau ont globalement augmenté, ce qui est normal. De plus, le Froude atteint avant le ressaut est plus important lorsque le débit augmente : il passe de 1,5 à quasiment 2.

Ces résultats sont très satisfaisants, car quantitativement cela représente bien la réalité telle que l'on l'imagine et observe. De plus, on peut remarquer que le ressaut va se déplacer, comme prévu par la théorie vers la droite. En effet, lors d'un tel changement les conditions fixées à l'amont prennent le dessus sur les conditions aval.

3.6.3. Changement du lieu du seuil.

Nous avons pu modifier le lieu de du seuil, ainsi que la pente. Voici les résultats obtenus, pour une pente bien plus importante après le passage du seuil, mais avec le seuil en 11,5 mètres. De plus sur ce graphe le seuil a été monté de 9 centimètres.

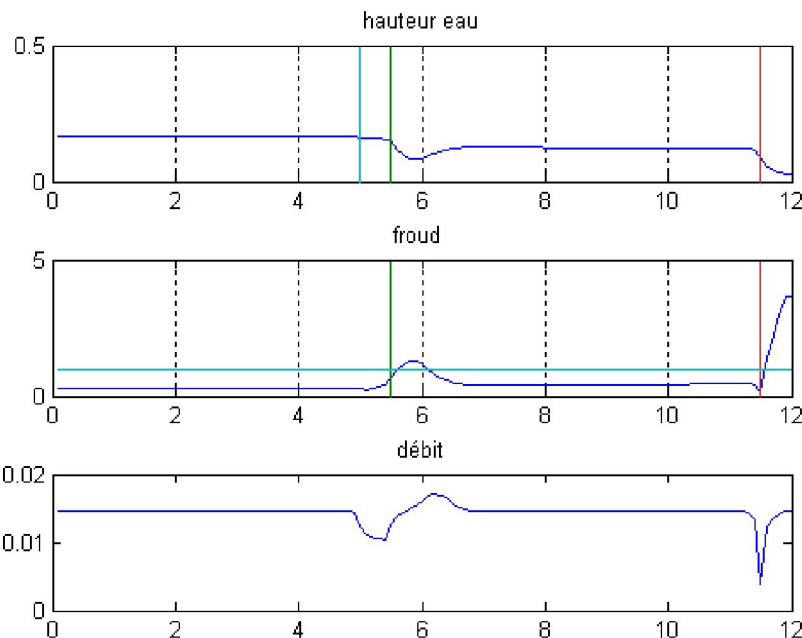


Figure 18 : Hauteurs, Froude, Débit pour $m=2000$ avec pente= $\pi/6$

Observations :

Les résultats sont toujours cohérents. Seulement l'augmentation de la vitesse est plus rapide, et influence moins le reste de l'écoulement avant le seuil. Cette géométrie semble donc plus adaptée que la précédente.

4. CONCLUSIONS

Le programme élaboré au cours de la majeure et du cours de modélisation par volumes finis des équations de Saint Venant 1 D, peut être appliqué à la géométrie du canal de l'école. Les résultats obtenus sont satisfaisants, car proche de ceux obtenus par nos camarades lors de manipulations concrètes du sur la veine hydraulique. Cependant, le maillage utilisé est assez grossier, donc la ligne de remous ne semble pas toujours bien décrite, notamment dans le convergent. Pour plus de précision, il faudrait un plus grand nombre de pas d'espace, ce qui rallonge le temps de calcul. De même, l'utilisateur a la possibilité de faire varier la condition CFL pour atténuer les oscillations dans les résultats, en augmentant le temps de calcul au risque de perdre de l'information concernant la géométrie de la ligne d'eau.